Fourier expansion and discretizations of determinantal point processes (Probability Symposium)

長田, 翔太

数理解析研究所講究録
第2030巻 2017年 77-83

Fourier expansion and discretizations of determinantal point processes

九州大学数理学府　長田翔太
Faculty of Mathematics, Kyushu University
Shota OSADA

1. 導入

行列式点過程とは, n 点相関関数がある核関数の行列式で与えられる点過程で, 反発する相互作用を持つ粒子系を記述する. 具体的なモデルでは, Bernoulli process が最も自明な離散の行列式点過程である. ほかには, uniform spanning tree, uniform tiling などが代表的な離散行列式点過程である. 一方, 連続空間の行列式点過程としては, $\mathbb{R}$ 上の行列式点過程である Sine_2, Airy_2, Bessel_2 などランダム行列に関連したものが有名である. 前者は幾何的な制限からくる干渉を持つ. 一方, 後者は対数ポテンシャルによって干渉することが知られている. ともに遠距離の強い相互作用である.

行列式点過程 μ の特徴のひとつに, 多重点を持たないことがあげられる. つまり,

$$\mu(\mathsf{s}(\{a\}) = 0 \text{ or } 1 \text{ for all } a) = 1$$

この性質は, 連続空間ではよくある性質だが, 離散空間では特に際立った性質となる. これを用いることにより, 行列式点過程は離散の方が扱いやすい. 実際, 離散空間のみで知られている性質がいくつもあり, tail 自明性はその一つである [6, 1, 2]. 我々は従来, 離散点過程でのみ知られていた tail 自明性を連続空間の行列式点過程に対して示す.

2. 行列式点過程

まず, 行列式点過程の一般的な設定について述べる. S を局所コンパクトな完備可分距離空間, d を S の距離とする. S 上の非負整数値ラドン測度 s を配置といい, 配置全体 S に漠位相を入れたもの $(\mathsf{S}, \mathcal{B}(\mathsf{S}))$ を配置空間という. 配置空間上の確率測度 μ を S 上の点過程という. 配置空間 S の tail σ-field　$\mathsf{Tail}(\mathsf{S})$ は, 次のように定義される.

$$\mathsf{Tail}(\mathsf{S}) := \bigcap_{r\in\mathbb{N}} \sigma[\pi_r^c] \tag{1}$$

ここで, $\pi_r^c : \mathsf{s}(\cdot) \mapsto \mathsf{s}(\cdot \cap B(r)^c)$, $B(r) = \{|x| \le r\}$ とする. 点過程 μ が tail 自明であるとは, すべての $A \in \mathsf{Tail}(\mathsf{S})$ に対し $\mu(A) \in \{0,1\}$ となることである.

m を S に備わったラドン測度とする. 点過程 μ の (m についての) n 点相関関数 ρ^n とは, 次の等式を満たす S 上の対称関数である.

$$\int_{A_1^{k_1}\times\cdots\times A_j^{k_j}} \rho^n(x_1,\ldots,x_n)\mathsf{m}^n(d\mathbf{x}) = \int_{\mathsf{S}} \prod_{i=1}^{j} \frac{\mathsf{s}(A_i)!}{(\mathsf{s}(A_i)-k_i)!}\mu(d\mathsf{s}) \tag{2}$$

ここで, $A_i,\dots,A_j$ は互いに素な可測集合, $k_1,\dots,k_j$ は $n=k_1+\cdots+k_j$ とする. ρ^n は各 x_m に粒子が存在する「密度」である. ρ^n が S 上のある核関数 $\mathsf{K}(x,y)$ によって次式で表されるとき, μ は行列式点過程 (DPP) であるという.

$$\rho^n(x_1,...,x_n)=\det[\mathsf{K}(x_i,x_j)]_{i,j=1}^n \tag{3}$$

行列式点過程はその相関関数の定義から多重点を持たないことに注意する. 行列式点過程の存在については, 十分条件が知られている.

定理 1 (白井-高橋 [5], Soshnikov[7]). (K,m) が (A.1) を満たすとき, S 上の行列式点過程が一意に存在する.

$$\begin{cases} K(x,y)=\overline{K(y,x)} \\ \mathsf{K}\text{ は局所トレースクラス作用素} \\ \mathsf{Spec}(\mathsf{K})\subset[0,1] \end{cases} \tag{A.1}$$

ここで, 核関数と同記号で $L^2(S,\mathsf{m})$ 作用素 $\mathsf{K}f(x)=\int_S\mathsf{K}(x,y)f(y)\mathsf{m}(dy)$ を表すことにする. K が局所トレースクラス作用素であるとは, 任意のコンパクト集合 A に対して $\mathsf{K}_Af(x):=\int_S 1_A(x)\mathsf{K}(x,y)1_A(y)f(x)\mathsf{m}(dy)$ がトレースクラス作用素になることである.

以下では (A.1) を仮定し, 対応する行列式点過程 μ を (K,m)-DPP とよぶ.

3. 主定理

我々は, 行列式点過程を空間の分割から離散化するロバストな手法を構成した. 離散空間上の行列式点過程は tail 自明であり, その離散化の tail 自明性をマルチンゲールの収束定理により元の点過程に再現することで主定理を証明している.

以下で分割 $\Delta=\{A_i;i\in I\}$ といえば, S の可算分割で各 A_i は相対コンパクトかつ $\mathsf{m}(A_i)>0$ であるものとする.

定理 2 ([3]). 分割の列 $\{\Delta(l);l\in\mathbb{N}\}$ で (A.2) を満たすものが存在するとき, μ は tail 自明である.

$$\begin{cases} \Delta(l)\prec\Delta(l+1) \\ \bigcap_{l\in\mathbb{N}}\sigma[A_i;i\in I(l)]=\mathcal{B}(S) \end{cases} \tag{A.2}$$

ここで, $\Delta(l)=\{A_i;i\in I(l)\}$ $(l\in\mathbb{N})$ とし, $\Delta(l)\prec\Delta(l+1)\Leftrightarrow^\forall i\in I(l+1),^\exists j\in I(l)$ s.t. $A_j\supsetneq A_i$ である. すなわち, 各 $A_j\in\Delta(l)$ は $\Delta(l+1)$ で 2 つ以上に分割される.

注意 1. $S=\mathbb{R}^d$, m =Lebesgue 測度であるときは, 自明に (A.2) を満たす. 行列式点過程の tail 自明性は無限次元確率微分方程式 (ISDE) の解の一意性を示すのに用いられている [4].

ここに上の定理の証明の概略を述べる. (A.2) を満たす分割 $\Delta(l) = \{A_i; i \in I(l)\}$ に対して, $\mathcal{B}(\mathsf{S})$ の部分 σ-field を $\mathcal{G}_l := \sigma[\{\mathsf{s} \in \mathsf{S} : \mathsf{s}(A_i) = n\}; n \in \mathbb{N}, i \in I(l)]$ とする. 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathsf{S})$ に対して $\mathcal{G}_l$ による正則条件付確率 $\mu(A|\mathcal{G}_l)(\mathsf{s})$ はマルチンゲールになる. ここで $\mu(A|\mathcal{G}_l)(\mathsf{s})$ が自明, すなわち $\mu(A|\mathcal{G}_l)(\mathsf{s}) \equiv 0$ or 1 であるとすると, マルチンゲール収束定理により $1_A(\mathsf{s}) \equiv 0$ or $1(\mu - a.s.)$ なので $\mu(A) = 0$ or 1 となる. 従って $A \in \mathsf{Tail}(\mathsf{S})$ に対し $\mu(A|\mathcal{G}_l)(\mathsf{s})$ の自明性を示せば定理が証明されるが, それには $A \in \mathsf{Tail}(\mathsf{S}) \cap \mathcal{G}_l$ に対して $\mu(A) = 0$ or 1 を示せばよいことが可測性の議論からわかる. ここで, μ の $\mathcal{G}_l$ への制限を μ_l とおくと, μ_l は $I(l)$ 上の点過程とみなせる（**図 1**）. 従って, μ の tail 自明性は μ_l の tail 自明性に帰着される.

なお, 離散空間上の行列式点過程は tail 自明であることが知られている.

定理 3 (白井-高橋 [6], R.Lyons[1, 2]). S : 離散集合, m : 計数測度のとき, μ は tail 自明である.

注意 2. 仮定から μ_l は離散空間上の点過程であるが, 多重点をもちうるので一般には行列式点過程にならない (**図 1**). そこで, 我々は分割の成分を底空間とする離散「ファイバー束」上の行列式点過程を構成することで μ_l の tail 自明性を示した.

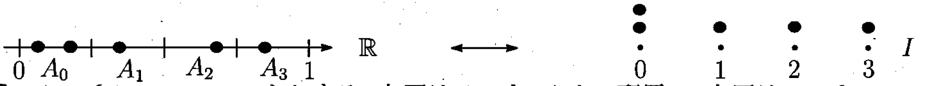

図 1:$\Delta = \{A_i; i = 0, 1, 2, 3\}$ とする. 左図は $S = [0, 1)$ 上の配置で, 右図は $I = \{0, 1, 2, 3\}$ 上の配置.

4. 行列式点過程の離散化

前節で μ の tail 自明性が μ_l の tail 自明性に帰着されることを示した. 以下では (A.2) を満たす分割から μ のもう一つの離散化を構成し, それが行列式点過程であることから μ_l の tail 自明性を導く.

まず行列式点過程の離散化について説明する. 簡単のために, $S = \mathbb{R}$, m =Lebesgue 測度とする. $\Delta(1)$ を長さ 1 の区間による分割, $\Delta(l)$ を $\Delta(1)$ を 2^{l-1} 等分したものとすると, これは (A.2) をみたす. このとき $\Delta(l) = \{A_i; i \in I(l)\}$ は次のようにあらわされる.

$$I(l) = \mathbb{Z} \times \{0, 1\}^{l-1}\ ,\ A_i = [\sum_{k=1}^{l} i_k \times 2^{-(k-1)}, \sum_{k=1}^{l} i_k \times 2^{-(k-1)} + 2^{-(l-1)}) \tag{4}$$

ここから $l \in \mathbb{N}$ を固定し, l 以降の分割 $\{\Delta(k); k \geq l\}$ の成分をサポートに持つような $L^2(S, \mathsf{m})$ の正規直交基底を構成する. $\mathbb{I}_l := I(l) + \sum_{k=l+1}^{\infty} \{i \in I(k); i_k = 0\}$ とする（**図 2**）. $i \in \mathbb{I}_l$ に対し, S 上の関数 $f_{l,i}$ を次のように定める.

$$f_{l,i} := \begin{cases} \mathsf{m}(A_i)^{-1/2} 1_{A_i}(x) & \text{for} \quad i \in I(l) \\ \mathsf{m}(A_i + A_{T(i)})^{-1/2} \{1_{A_i}(x) - 1_{A_{T(i)}}(x)\} & \text{for} \quad i \in \mathbb{I}_l \backslash I(l) \quad \text{(Haar 関数)} \end{cases} \tag{5}$$

ここで, $T : i = (i_1, \dots, i_{k-1}, 0) \mapsto (i_1, \dots, i_{k-1}, 1)$ $(i \in I(k), k \in \mathbb{N})$ とする. $1_{A_i}(x)$ $(i \in \sum_{l\in\mathbb{N}} I(l))$ は $f_{l,i}$ $(i \in \mathbb{I}_l)$ の線形結合で書けるので, $\mathbb{F}_l := \{f_{l,i}; i \in \mathbb{I}_l\}$ は $L^2(S, \mathsf{m})$ の正規直交基底となる. K の $\mathbb{F}_l$ に関するフーリエ係数を, 次のように定義する.

$$\mathbb{K}_l(i,j) := \int_{S\times S} \mathsf{K}(x,y)\overline{f_{l,i}(x)} f_{l,j}(y) \mathsf{m}(dx)\mathsf{m}(dy) \tag{6}$$

この $\mathbb{K}_l$ は, $\mathbb{I}_l$ 上の核関数とみなせる. 同じ記号で $L^2(\mathbb{I}_l, \lambda_{\mathbb{I}_l})$ 作用素 $\mathbb{K}_l\xi(i) = \sum_{j\in\mathbb{I}_l} \mathbb{K}_l(i,j)\xi(j)$ を表すことにすると, $\mathbb{K}_l$ は (A.1) を満たしている. ここで, $\lambda_{\mathbb{I}_l}$ は $\mathbb{I}_l$ 上の数え上げ測度である. 定理 1 より, $\mathbb{I}_l$ 上の行列式点過程 $\mu_{\mathbb{F}_l} : (\mathbb{K}_l, \lambda_{\mathbb{I}_l})$-DPP が一意に存在する. $\mathbb{I}_l$ は離散空間なので, 定理 3 より $\mu_{\mathbb{F}_l}$ は tail 自明である. ここで, $\mathsf{Tail}(\mathbb{I}_l)$ は (1) 式で $B(r)$ を

$$\mathbb{B}_l(r) = \{i = (i_1, \dots, i_{l+p}) \in \mathbb{I}_l \mid 0 \le p \le r, |i_1| \le r\}$$

としたものである.

注意 3. $m < l$ に対し $\mathbb{I}_l \cap \mathbb{I}_m = \mathbb{I}_l \backslash I(l)$ である. 特に, Haar 関数 $f_{l,i}$ $(i \in \mathbb{I}_l \backslash I_l)$ は l によらない. また, $k > l$ に対し $\{\mathsf{supp} f_{l,i}; i \in \mathbb{I}_l \cap I(k)\} = \Delta(k-1)$ である.

次に, μ_l と $\mu_{\mathbb{F}_l}$ との関係式を述べる. $\Pi : i = (i_1, \dots, i_m) \mapsto \sum_{k=1}^m i_k 2^{-(k-1)} + 2^{-m}$ とする. これは i を A_i の中点に移すような $\mathbb{I} \to \mathbb{R}$ への射影である. Π から決まる配置の射影を $\underline{\Pi}$ であらわす. このとき次の関係式が成り立つ.

定理 4. すべての $A \in \mathcal{G}_l$ に対して, 次が成り立つ.

$$\mu_l(A) = \mu_{\mathbb{F}_l} \circ \underline{\Pi}^{-1}(A) \ . \tag{7}$$

$\Pi^{-1}(B(r)^c) \subset \mathbb{B}_l(r)^c$ なので, $A \in \mathsf{Tail(S)} \cap \mathcal{G}_l \Rightarrow \underline{\Pi}^{-1}(A) \in \mathsf{Tail}(\mathbb{I}_l)$ である. よって, $\mu_{\mathbb{F}_l}$ の tail 自明性から μ_l の tail 自明性が従う.

5. 行列式点過程のフーリエ変換

ここでは, 前節で述べた離散化がもつフーリエ変換の性質について述べる.

関数空間 $L^2_{\mathsf{K}}(S \times S, \mathsf{m} \times \mathsf{m})$, $L^2_{\mathbb{K}_l}(\mathbb{I}_l \times \mathbb{I}_l, \lambda_{\mathbb{I}_l} \times \lambda_{\mathbb{I}_l})$ を, それぞれ核関数を含む積分で内積を定義した空間とする. これらの間にパーセバルの等式が成り立つ.

定理 5 ([3]). $F(x) = \sum_{i\in\mathbb{I}_l} \xi(i) f_{l,i}(x)$, $G(y) = \sum_{j\in\mathbb{I}_l} \eta(j) f_{l,j}(y)$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$\sum_{i,j\in\mathbb{I}_l} \mathbb{K}_l(i,j)\overline{\xi(i)}\eta(j) = \int_{S\times S} \mathsf{K}(x,y)\overline{F(x)} G(y) \mathsf{m}(dx)\mathsf{m}(dy) \tag{8}$$

ここで, ξ と η はサポートが有界な $\mathbb{I}_l$ 上の関数する.

注意 4. 上式は $L^2(S \times S, \mathsf{m} \times \mathsf{m})$, $L^2(\mathbb{I}_l \times \mathbb{I}_l, \lambda_{\mathbb{I}_l} \times \lambda_{\mathbb{I}_l})$ 間のパーセバルの等式ではないことに注意する. 一方でこの式は F と ξ の等長変換を意味する. 従って $\mathsf{Spec}(\mathbb{K}_l)$ の評価は容易であり, これは前節で述べた離散化の構成のキーポイントになっている.

定理5より, 次のフーリエ展開の等式が導かれる.

定理 6 ([3]). $L^2_{loc}(S \times S, \mathsf{m} \times \mathsf{m})$ 上で K は次のように展開できる.

$$\mathsf{K}(x,y) = \sum_{i,j \in \mathbb{I}_l} \mathbb{K}_l(i,j) f_{l,i}(x) \overline{f_{l,j}}(y) \tag{9}$$

$\rho^n_{\mathbb{F}_l}$ を $\mu_{\mathbb{F}_l}$ の n 点相関関数とする. 定理5, 定理6と $\mathbb{F}_l$ の直交性により, 次の等式が成り立つ.

定理 7 ([3]). $\mathbb{A} = A_1 \times \cdots \times A_n$ $(A_1, \ldots, A_n \in \Delta(l))$ とし, $\mathbb{I}_l(\mathbb{A}) = \mathbb{I}_l(A_1) \times \cdots \times \mathbb{I}_l(A_n)$, $\mathbb{I}_l(A) := \{i \in \mathbb{I}_l; \mathsf{supp}(f_{l,i}) \subset A\}$ とする. このとき次が成り立つ.

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_n) \in \mathbb{I}_l(\mathbb{A})} \rho^n_{\mathbb{F}_l}(i_1, \ldots, i_n) = \int_{\mathbb{A}} \rho^n(x_1, \ldots, x_n) \mathsf{m}^n(d\mathbf{x}) \tag{10}$$

定理7により定理4が成り立つ. この等式は連続空間の点過程と離散空間の点過程との関係式である. 我々はこれを行列式点過程のフーリエ変換と呼んでいる.

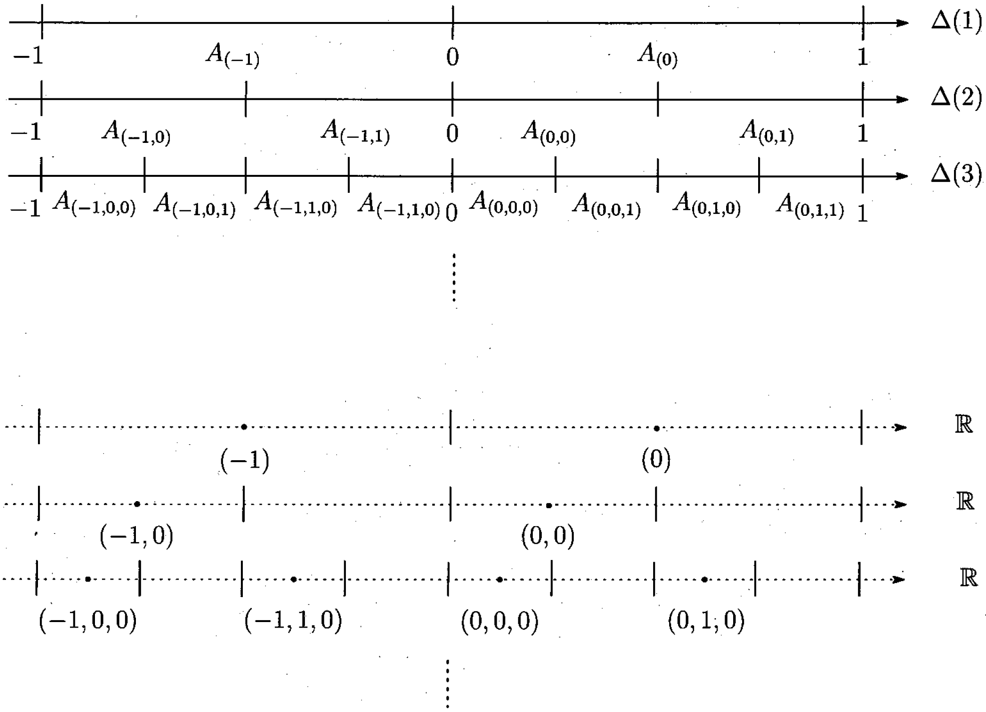

図 2:左図は $\{\Delta(l); l \geq 1\}$. 右図は $\mathbb{I}_1$.

参考文献

[1] Lyons, R. : *Determinantal probability measures*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **98** (2003), 167-212.

[2] Lyons, R. : *Determinantal probability: basic properties and conjectures*, arXiv in math 1406.2707v1 (2014).

[3] Osada, H., Osada, S., *Discrete approximations of determinantal point processes on continuous spaces: tree representations and tail triviality*,, arXive:1603.07478-v3.

[4] Osada, H., Tanemura, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations and tail σ-fields*,, arXiv:1412.8674.

[5] Shirai, T., Takahashi, Y., *Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: fermion, Poisson and boson point process*, J. Funct. Anal. **205**, 414-463 (2003).

[6] Shirai T., and Takahashi Y. : *Random point fields associated with certain Fredholm determinants II: fermion shifts and their ergodic properties,*, Ann. Prob. **31** (2003), 1533–1564.

[7] Soshnikov, A., *Determinantal random point fields*, Russian Math. Surveys **55**, 923-975 (2000).